岩木耕平　2017-06-05　完全WKB解析とその周辺　東北大学談話会　①

黒木玄記

WKB近似　$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right)\psi = 0.$　　$Q(x)$：有理函数，x：複素座標

WKB解　$\psi(x,\hbar) = \exp\left(\int^x P_\pm(x',\hbar)\,dx'\right)$

$$P_\pm(x,\hbar) = \sum_{n\geq 0} \hbar^{n-1} P_n(x) \quad \text{(WKB Ansatz)}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\pm\sqrt{Q(x)}\right) - \frac{Q'(x)}{4Q(x)} + \hbar\left(\pm\frac{4Q(x)Q''(x) - 5Q'(x)^2}{32Q(x)^{5/2}}\right) + \cdots$$

$Q(x)$の零点（変わり点）や$Q(x)$の極を除いて2価正則.

つながり

完全WKB解析 ＝ WKB法＋Borel総和法＋超局所解析／resurgence理論

- モノドロミー行列の計算
- Painlevé方程式への応用
- クラスター代数（Iwaki and Nakanishi, Gaiotto-Moore-Neitzke）
- 位相的漸化式（Iwaki, Koike, and Y. Takei）むすめさんの方

Eynard-Orantin 2007 代数曲線 $\Sigma \longmapsto \left\{W^{\Sigma}_{g,n}(z_1,\ldots,z_n)\right\}_{g\geq 0,\,n\geq 0}$

Gromov-Witten inv., Hurwitz num., Mirzakhani体積, KdVのτ, …

講演者：岩木 耕平 氏（名古屋大学）
題目：完全WKB解析とその周辺
概要：

完全WKB解析は古典的な WKB 近似法と Borel 総和法を組み合わせた手法であり、プランク定数のような小さなパラメータを含む (特異摂動型の) 微分方程式の大域解析に非常に有効である。完全WKB解析の理論の帰結として、2階線形常微分方程式のモノドロミーや接続公式はVoros係数と呼ばれる量で記述されるのだが、談話会ではこの Voros 係数が持つ様々な側面を紹介したい。特に、クラスター代数や位相的漸化式との関係について、具体例を通じながら解説する予定である。本談話会での講演内容は、小池達也氏 (神戸大)、竹井優美子氏 (神戸大)、中西知樹氏 (名古屋大) との共同研究に基づく。

Borel 総和法

$$\hbar^{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{\hbar}} \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dy \quad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0),$$

分母に$(\alpha-1)!$が出て来て収束性がよくなる.

例 $$f(x,\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^{-n} \hbar^{-n-1}$$

$\downarrow$ Borel 変換

$$f_B(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, x^{-n}}{\Gamma(n+1)} y^n = \frac{1}{1-y/x}$$

$\downarrow$ Laplace 変換

$$S[f](x,\hbar) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-y/\hbar}}{1-y/x}\, dy \underset{\hbar\to+0}{\sim} f(x,\hbar)$$

$S[f]$ を f の Borel 和と呼ぶ.

$x \notin \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow f(x,\hbar)$ は Borel 総和可能

$x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow f(x,\hbar)$ は Borel 総和不可能

Stokes 現象 $S_+[f] - S_-[f] = 2\pi i$ $\quad S_{\pm}[f] \leftarrow \mathrm{Im}\,x \gtrless 0$

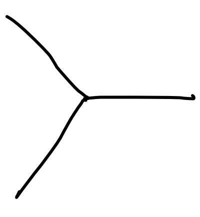
Stokes グラフ

頂点: $Q(x)$ の零点(変わり点)と極

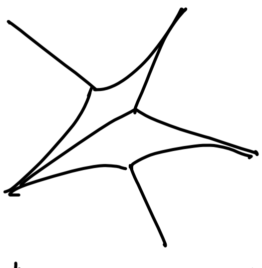
辺: 変わり点から生じるStokes曲線 $\left(\mathrm{Im}\int_{変わり点}^{x} \sqrt{Q(x')}\, dx' = 0\right.$ で定まる積分曲線$\left.\right)$

Stokesグラフにxが含まれなければBorel総和可能. $\longrightarrow$ Schrödinger eq の解析解.

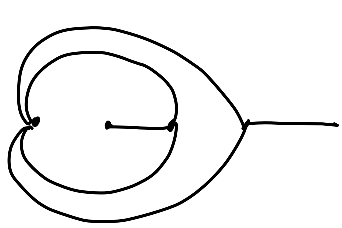
$Q(x) = x$



$Q(x) = x(x+1)(x+i)$



$Q(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2(x-1)^2}$



変わり点でnormalizeしておくと接続行列はすごくカンタンな形になる.

変わり点どうしを結ぶ積分でモノドロミー行列が書ける.

Aoki-Kawai-Takei-Sato 1991 $\quad Q(x)$ の零点がすべて1位の場合

Voros 係数 $\quad V_{\gamma}(\hbar) = \oint_{\gamma} P(x,\hbar)\, dx$

別のタイプのVoros係数

$$W_{\beta}(\hbar) = \int_{\beta} \left(P(x,\hbar) - \hbar\sqrt{Q(x)}\right) dx$$

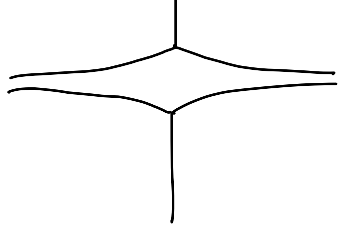
調和振動子 (Weber eq.)

$$Q(x) = \frac{x^2}{4} + E$$

∞で正規化されたWKB解を考える:

$$\psi_\pm^{(\infty)} \ \text{“}=\text{”}\ \exp\left(\int_\infty^x P_\pm(x',\hbar)\,dx'\right)$$

E>0の場合 $S[\psi_-^{(\infty)}] \rightsquigarrow S[\psi_-^{(\infty)}] + i\,S[e^{W_\beta}]\cdot S[\psi_+^{(\infty)}]$



$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!}t^n$$

Theorem (Voros 83, Takei 07)

$$W_\beta(\hbar) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(1-2^{1-2n})B_{2n}}{2n(2n-1)}\left(-\frac{\hbar}{E}\right)^{2n-1}$$

W_βのBorel和はΓ関数で書ける。

クラスター代数との関係

exact WKB	クラスター代数
Stokesグラフとその変異	$B=(b_{ij})$とその変異
$e^{W_{\beta_i}}$	x_i
$e^{V_{\gamma_i}}$	y_i
$\exp\left(\hbar^{-1}\oint_{\gamma_i}\sqrt{Q(x)}\right)$	係数 r_i $\left(y_i = r_i \prod_{j=1}^n x_j^{b_{ij}}\right)$
VorosシンボルのStokes現象	変異
Stokes自己同型のみたすrels.	周期性

位相的漸化式

Eynard-Orantin 2007

Input: Σ (スペクトル曲線, genus $=0$) のパラメーター表示

$$\Sigma : \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$$

$x(z), y(z)$: $\mathbb{P}^1$ 上の有理函数

$$\omega_1^{(0)}(z_1) = y(z_1)\, dx(z_1)$$

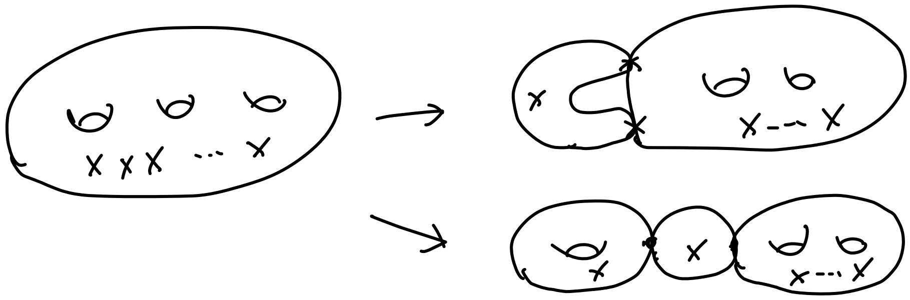
Output: $\left\{ \omega_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n) = W_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n)\, dz_1 \cdots dz_n \right\}_{g \geq 0,\, n \geq 0}$

$$\omega_2^{(0)}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$$

Bergman kernel

ふくざつなゼンカシキ

ゼンカ式は genus g の Riemann 面の退化を表わしている.



自由エネルギー

$$F^{(g)} := \frac{1}{2-2g} \sum_{a:\text{分岐点}} \operatorname*{Res}_{z=a} \Phi(z)\, \omega_1^{(g)}(z), \quad \Phi(z) := \int^z y(z)\, dx(z)$$

$$\frac{dF^{(g)}(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \Lambda(z,t)\, \omega_1^{(g)}(z,t) \quad (g \geq 1)$$

例

$$x(z) = E^{1/2}(z + z^{-1}), \quad y(z) = \frac{E^{1/2}}{2}(z - z^{-1}) \iff y^2 = \frac{x^2}{4} - E \quad (\text{Weber曲線})$$

$$\longmapsto F^{(g)}_{\mathrm{Weber}} = \chi(\mathcal{M}_g) E^{2-2g} = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} E^{2-2g}$$

; Harer-Zagier-Penner

例

$$x(z) = z^2 + t_1, \quad y(z) = z - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} t_{k+2} z^{k+2} \longmapsto \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F^{(g)}(t)$$

: Witten-Kontsevich KdV τ

量子代数曲線

$$\begin{cases} x(z) = E^{1/2}(z+z^{-1}) \\ y(z) = \dfrac{E^{1/2}}{2}(z-z^{-1}) \end{cases} \iff y^2 = \frac{x^2}{4} - E$$

$$\psi(x,\hbar) = \exp\left(\sum_{g\geq 0,\, n\geq 1} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} \frac{1}{2^n} \int_{1/z_1}^{z_1} \cdots \int_{1/z_n}^{z_n} W_n^{(g)}(z_1,\ldots,z_n) \right)\Bigg|_{z_1=\cdots=z_n=z(x)}$$

は Weber eq. $\left(\hbar \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4}-E\right)\right)\psi(x,\hbar)=0$ の WKB解.

Weber方程式のVoros係数と自由エネルギー

$$F(E,\hbar) := \sum_{g\geq 0} \hbar^{2g-2} F^{(g)}_{\mathrm{Weber}}(E),$$

うまく正則化すると $\int_\beta \sqrt{Q(x)}\,dx$ と書ける.

$$F\left(E+\frac{\hbar}{2},\hbar\right) - F\left(E-\frac{\hbar}{2},\hbar\right) = W_\beta(E,\hbar) + \frac{1}{\hbar}\overbrace{\frac{\partial F_0}{\partial E}}$$

Harer-Zagier-Penner の公式の別証明 : $F^{(g)}_{\mathrm{Weber}} = \dfrac{B_{2g}}{\underbrace{2g(2g-2)}_{=\,\chi(\mathcal{M}_g)}} E^{2-2g}$

Weber eq の Stokes グラフ　　A_1-quiver

$\boxed{\text{問題}}$ Weber方程式を一般の超幾何に一般化しても同じことをできるのではないか?